

## שאלה 1

במדינה מסוימת, לכל אחד משני מיליון התושבים יש חיות מחמד. באותו הזמן, בדיוק למחצית מהתושבים יש 12 חיות מחמד, ולחצי השני 24 חיות מחמד. שתי חיות מחמד נקראות "חברים" אם יש להם אותו בעל (בפרט, כל חיה הוא "חבר" של עצמו). מצא את ההפרש בין המספר הממוצע של "חברים" של חייית מחמד ואת המספר הממוצע של חיות מחמד, שנמצאות בבעלות כל אזרח של אותה המדינה.

## שאלה 2

הולך רגל עבר שלישי מהמסלול במהירות  $v_1 = 12,5$  קמ"ש, שלישי מהזמן הלך במהירות של  $v_2 = 4,5$  קמ"ש. ואת שארית הדרך הלך במהירות ששווה למהירות הממוצעת בנתיב. חשב את המהירות הממוצעת של הולך רגל.

## שאלה 3

נתון כי  $f_1(x) = x - x^2$ ,  $f_2(x) = x + x^3$ ,  $g_1(x) = x - x^3$ ,  $g_2(x) = x + x^2$ ,  $f_2(x) = x + x^2$ , חשבי את

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f_1(g_1(f_2(g_2(x))))}{x^3}$$

## שאלה 4

בתחרות מסוימת משתתפים  $n$  סטודנטים. כל משתתפי התחרות יקבלו גלויות יפות. סטודנט שזכה במקום הראשון יקבל גלויה אחת ועשירית מכמות הגלויות שנותרו. סטודנט שזכה במקום השני יקבל שתי גלויות ועשירית מכמות הגלויות שנותרו. סטודנט שזכה במקום ה- $n$  (האחרון) יקבל  $n$  גלויות ועשירית מכמות הגלויות שנותרו. כל הגלויות חולקו. מהי כמות הסטודנטים שהשתתפו בתחרות זו?

## שאלה 5

חשבי את האינטגרל הבא:

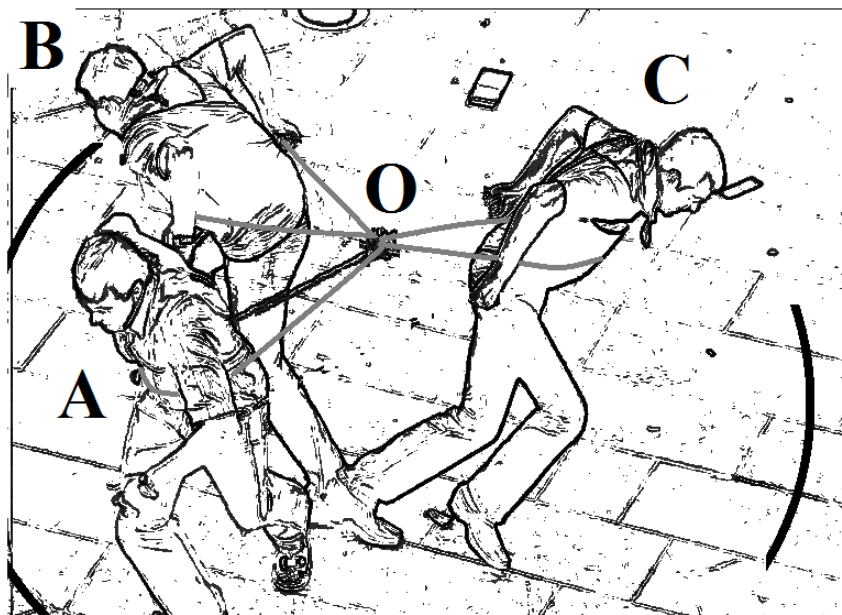
$$\int_0^{2014} \frac{f(x)}{f(x) + f(2014 - x)} dx$$

## שאלה 6

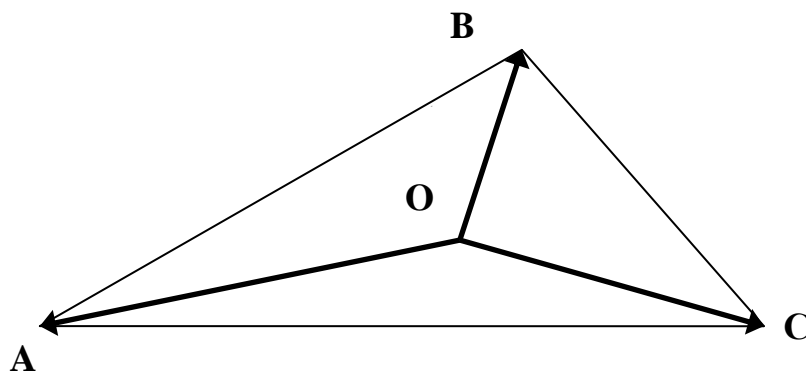
חרגול קפצן (בגודל של נקודה) קופץ בתוך ריבוע יחידה. בתחילה, הוא יכול להיות בכל מקום בריבוע זה. בכל שנייה הוא בוחר בקדקוד כלשהו של הריבוע ומתקרב אליו פי ארבעה. חשבי את שטח הנתפס ע"י נקודות קפיצה של החרגול לאחר קפיצה חמישית שלו. (לדוגמה שטח הנתפס ע"י נקודות קפיצה של החרגול לפני קפיצה ראשונה שווה 1).

## שאלה 7

בתחרות משייכת חבל משתתפים שלושה אנשים (ראה איור).



המטרה של כל אחד מצדדים היא לחצות את הקו שצויר בחזית שלו. חבר C מתכנן למשוך את החבל בכוח  $\vec{F}_C$  השווה בגודלו לכפל של המרחק מהקדקוד  $O$ , שמחבר חבלים של משתתפי התחרות, בשטח המשולש שנוצר על ידי הווקטורים המגיעים מהקדקוד  $C$  עד למתחרים שלו  $\vec{F}_C = S_A \cdot \vec{OC}$ , כאשר  $S_C$  הוא שטח של משולש  $AOB$  (ראה איור).



הוכח כי במקרה שבו כל אחד ממשתתפים ייבצע את אותה האסטרטגיה, אז אף אחד מהם לא יזוז ממקומו.  
 $..(\vec{F}_C + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0})$

## שאלה 8

מהו מספר של מטריצות הלא סינגולריות בסדר 3 שהאיברים שלהם הם אפסים ואחדים?

## שאלה 9

חשבי את חלק שלם של סכום של 4028 מספרים הבאים.

$$\sqrt{2014^2 + 1} + \sqrt{2014^2 + 2} + \dots + \sqrt{2014^2 + 2 \cdot 2014} = \sum_{k=1}^{2 \cdot 2014} \sqrt{2014^2 + k}.$$

## שאלה 10

יהיו  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$  הם המחלקים השונים החיובים את מספר  $N = 2^{2014} + 1$  הכתובים בסדר עולה. חשבו את  $(a_{n+1} - a_n)$ .

## שאלה 11

ויקטור חשב על מספר כלשהו מ-1 עד  $n$ . מיכאל צריך למצוא את המספר על ידי שאל שאלות שונות. לדוגמא, "האם זה נכון, כי מספר זה הוא קטן מ-5"; "האם זה נכון כי מספר זה הוא זוגי", וכו'. עבור תשובה "כן" מיכאל משלם \$1, עבור התשובה "לא" – \$10. בתחילת המשחק למיכאל יש 32 דולרים. למיכאל מותר לשאול שאלות רק אם יש לו לא פחות מ-10 דולרים. מהו  $n$  גדול ביותר שמיכאל יכול למצוא את המספר.

## שאלה 12

מהו  $N$  מקסימלי שניתן למקם  $N$  נקודות על המישור, לחבר אותן בזוגות ע"י צלעות ולצבוע את הצלעות בשני צבעים – שחור ואדום, כך שלצלעות בנות אותו צבע לא יהיו נקודות חיתוך הנמצאות בתוך הצלע (במילים אחרות נקודת חיתוך של צלעות בנות אותו צבע לא צרכים להיות נקודות פנימיות של הצלעות), ולכל צלע יכול להיות לא יותר מנקודה אחת משותפת עם צלע בצבע שונה?

## הערה

מעניין להכליל את הבעיה למעברים גבולות שרירותיים על ידי קצוות. נשמח אם תשלחו לנו את דעתכם בנושא זה.