Задание 1

В Восточной Пруссии каждый из двух миллионов жителей владеет прусаками. При этом ровно половина жителей владеет 12 прусаками, а другая половина 24 прусаками. Два прусака называются «товарищами», если у них общий хозяин (в частности, каждый прусак сам себе «товарищ»). Найдите разность между средним числом «товарищей» у прусака и средним числом «прусаков», которым владеет каждый житель Пруссии.

Задание 2

Пешеход треть всего пути бежал со скоростью $v_1 = 12{,}5$ км/ч, треть всего времени шел со скоростью $v_2 = 4{,}5$ км/ч, а оставшуюся часть пути шел со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Чему равна средняя скорость пешехода?

Задание 3

Пусть $f_1(x) = x - x^2$, $f_2(x) = x + x^2$, $g_1(x) = x - x^3$, $g_2(x) = x + x^3$.

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - f_1(g_1(f_2(g_2(x))))}{x^3}$.

Задание 4

Участники новогоднего конкурса получают открытки (всего n участников). За первое место дается одна открытка и десятая часть оставшихся, за второе место – две открытки и десятая часть оставшихся, за последнее n-е место – n открыток и десятая часть оставшихся. Все открытки были розданы. Сколько было участников?

Задание 5

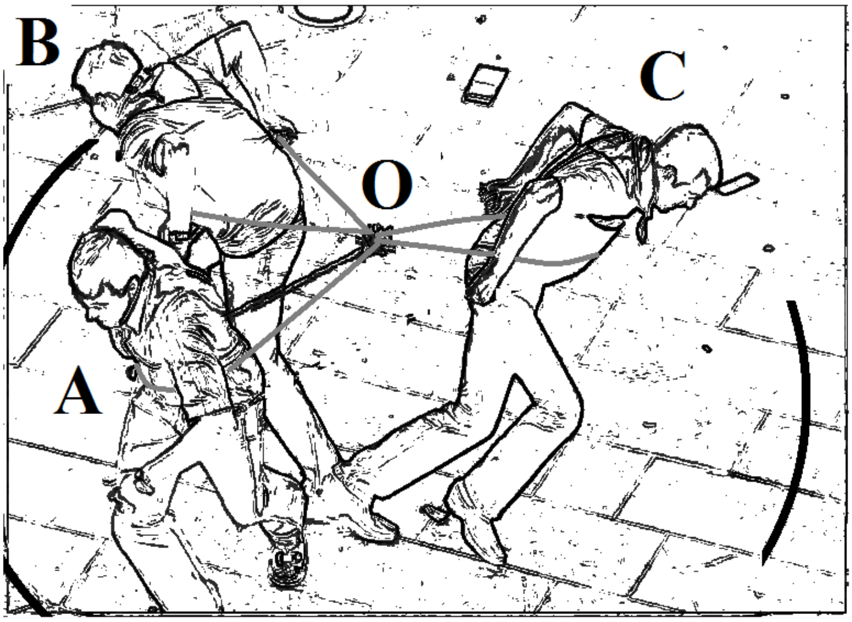
Найти интеграл $\int\limits_0^{2014} \dfrac{f(x)}{f(x) + f(2014 - x)} dx$.

Задание 6

Блоха прыгает внутри единичного квадрата. Изначально она может находиться в любой точке этого квадрата. В каждую секунду она выбирает вершину, и приближается к ней в четыре раза, прыгая по направлению к этой вершине. Найдите площадь множества точек, в которых она может оказаться после пятого прыжка (например, площадь множества точек, в которых она может находиться до первого прыжка, равна 1).

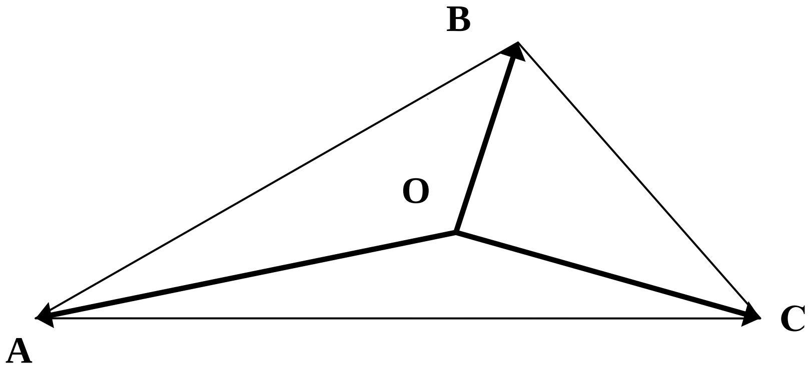
Задание 7

В соревновании по перетягиванию каната участвуют три человека (смотри рисунок).



Цель каждого участника – переступить нарисованную перед ним черту.

Участник ***C*** планирует тянуть канат с силой $\overrightarrow{F_C}$ равной по величине произведению расстояния от узла ***O***, соединяющего веревки участников, до участника ***C*** на площадь треугольника, образованного векторами, идущими от узла к его соперникам ($\overrightarrow{F_C} = S_C \cdot \overrightarrow{OC}$, где S_C - площадь треугольника AOB, смотри рисунок).



Доказать, что если каждый участник будет придерживаться такой же стратегии, то никто из них не сдвинется с места ($\overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \vec{0}$).

Задание 8

Сколько существует различных невырожденных матриц 3-го порядка элементами которых являются числа «0» или «1»?

Задание 9

Найдите целую часть суммы 4028 слагаемых

$$\sqrt{2014^2+1}+\sqrt{2014^2+2}+\ldots\sqrt{2014^2+2\cdot 2014}=\sum_{k=1}^{2\cdot 2014}\sqrt{2014^2+k}.$$

Задание 10

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ – все различные положительные делители числа $N = 2^{2014}+1$, выписанные в порядке возрастания. Найти $(a_{n+1}-a_n)$.

Задание 11

Витя задумал число от 1 до n. Миша должен найти задуманное Витей число, задавая различные вопросы (например, верно ли, что это число меньше 5; верно ли, что число четное и т. п.). За ответ «Да» Миша платит 1$, за ответ «Нет» – 10$. В кармане у Миши 32 доллара. Разрешено задавать вопросы только при наличии не менее 10 долларов. При каком максимальном n Миша может найти число?

Задание 12

Для какого максимального N можно расположить N точек на плоскости, соединить их попарно отрезками, и раскрасить отрезки в синий и красный цвета так, чтобы одноцветные отрезки не имели внутренних точек пересечения, а каждый отрезок мог иметь не более одной точки пересечения с отрезком другого цвета?