שאלה 1

בעיר טמא-טרקנית שמספר התושבים פחות מ-2000000 איש, האוכלוסיה מורכבת משתי קבוצות בלבד: פרוסקים וקוקרצ'ים. כל פרוסק מכיר 1000 קוקרצ'ים וכל קוקרץ' מכיר 1001 פרוסקים. הכרות היא הדדית (אם הקוקרץ מכיר את הפרוסק, אז גם הפרוסק מכיר את הקוקרץ').

מהו המספר המקסימאלי של תושבי העיר ?

שאלה 2

מכונית נוסעת מעיר A עיר B. היא נוסעת בתאוצה קבועה ומגיעה למהירות של 80 קמ"ש. במהירות זו היא נוסעת חצי הזמן של הנסיעה מ- A ל- B. לפני הגעה לעיר B היא האטה את מהירותה בתאוצה קבועה שלילית עד שעצרה ב- B. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

שאלה 3

נתון N מספר טבעי כך ש- $N + S(N) = 2999$, כאשר $S(N)$ הוא סכום ספרות של מספר N.
יש למצוא את N.

שאלה 4

פונקציה $f(x)$ מקיימת את השוויונים הבאים לכל x:

$$f(x) + f(-x) = 2$$

$$f(1-x) = f(1+x) .$$

חשבו את האינטגרל $\int_0^{2016} f(x)$.

שאלה 5

דטרמיננטה של מטריצה A שווה 1. כל איברי מטריצות A^{2015} ו- A^{2017} הם מספרים שלמים. האם ניתן להשיג מכאן שכל איברי מטריצה A הם גם מספרים שלמים?

שאלה 6

בקבוצה של n אנשים יש 2^{n-1} תתי-קבוצות (אוהבי ריקודי עם, אוהבי כדורגל וכו'). ידוע כי בכל שלוש תתי-קבוצות יש משתתף משותף. תוכיחו כי יש איש שמשתתף בכל הקבוצות.

שאלה 7

נתונה נקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במרחב כך ששעוריה הם מספרים חיובים: $x_0>0, y_0>0, z_0>0$. דרך נקודה M מעבירים מישור. חשבו את הנפח המינימאלי של פירמידה משולשת הכלואה בין מישור זה לבין מישורים XOY, XOZ, YOZ.

שאלה 8

יהיו m,n – מספרים טבעיים. חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\dots}{1+\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{x^{3m}}{(3m)!}+\dots}$$

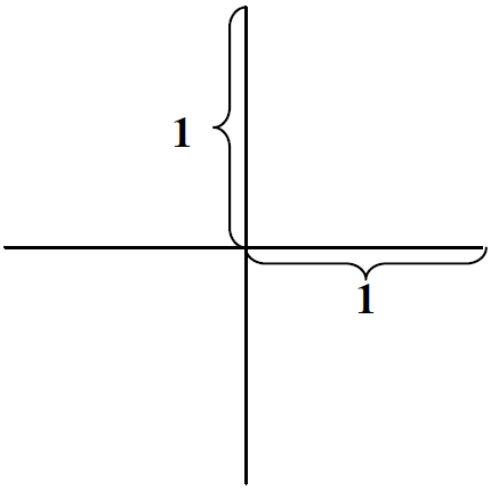
שאלה 9

הוכיחו כי לכל מספרים ראשוניים $p>2000$ $1+2^{2000}+3^{2000}+\ldots+(p-1)^{2000}$
סכום מתחלק ב- p.

שאלה 10

שוטר רודף אחרי גנגסטר בעיר מסוימת, שיש בה רק שני רחובות שווי אורך, הנחתכות בזווית ישרה באמצע.

אורך של כל רחוב הוא 2 (איור 1). השוטר והגנגסטר יכולים לרוץ רק לאורך הרחובות האלה. המהירות של השוטר פי 10 גדולה ממהירות של הגנגסטר.



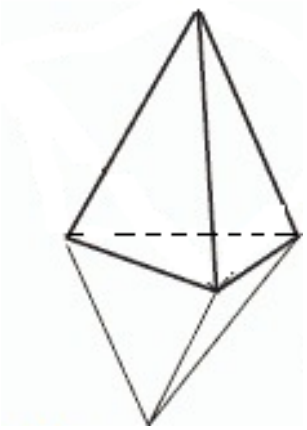
איור 1

א) האם השוטר יכול לתפוס את הגנגסטר בזמן מוגבל?

ב) האם השוטר יכול לתפוס את הגנגסטר אם מותר לו לשנות את כוון הריצה רק 2015 פעמים?

שאלה 11

במרחב נתונים טטראדר (באנגלית: Tetrahedron) משוכלל וכדור. ניתן לשקף את הטטראדר מכל פאה שלו (איור 2).האם דרך פעולות שיקוף כאלה אפשר להכניס את מרכזו של הטטראדר לתוך הכדור?



איור 2