

תרגיל 3 : פונקצית לגרנז' (Lagrange) ועוד כמה דברים

1. לחשב את את הרכיבים וערך מוחלט של תנע זוויתי בקואורדינטות כדוריות וגליליות.



תשובה:

$$\begin{aligned} M_x &= m \sin \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \cos \varphi \\ M_y &= m \cos \varphi (-r\dot{z} + z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \sin \varphi \\ M_z &= m r^2 \dot{\varphi} \\ M^2 &= m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -mr^2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi) \\ M_y &= mr^2 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi) \\ M_z &= mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ M^2 &= m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

2. מה היחס בין זמנים של תנועה של חלקיקים על אותו מסלולים עם מסות שונות ואנרגיות פוטנציאליות שוות? מה היחס כאשר מסות שוות ואנרגיות שונות?



תשובה:

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad \frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{U}{U'}}$$

3. לחשב את זמן המחזור של תנודות של מטוטלת מטמטית (מסה m על הקצה של מוט L בתוך שדה הכבידה) כפונקציה של האמפליטודה של התנודות.



תשובה:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{\max} \sin^2 x}}$$

4. למצוא את זמן המחזור של תנועה של חלקיק עם מסה m בתוך שדה פוטנציאלי:



א. $U = A|x|^n$
 ב. $-U_0 < E < 0 \quad U = -U_0 / (\cosh \alpha x)^2$
 ג. $U = U_0 (\tan \alpha x)^2$

תשובה: לבדוק בספר Landau !!!



5. חלקיק נע על עקומה $y = y(x)$ שנמצאת במישור אנכי. למצוא את זמן התנועה בין שתי נקודות בעקומה.

תשובה:
$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-mgy(x))}} dx$$



6. נתונים שני ניקודות A ו B במישור אנכי שלא נמצאות אל אותו קו. למצוא משוואות של עקומה בין הנקודות שתנועתו של החלקיק על העקומה מ A ל B נמשכת זמן מינימאלי.

תשובה:

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), y = -R(1 - \cos \varphi), R = \frac{1}{4gc^2}, c - \text{initial parameter}, \varphi - \text{parameter of the motion}$$



7. חלקיק נע בעקומה. לכתוב פונקציית Lagrange, משוואות תנועה ואינטגרל התנועה.

תשובה:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 - V(q), \quad m\dot{s} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial U}{\partial q},$$

$$\dot{s} = \sqrt{h}\dot{q}, s - \text{length of arc}, q - \text{parameter of the curve}.$$



8. חלקיק נע בתוך שדה מגנטי הנתון על ידי פוטנציאל $A_r = 0, A_\varphi = A(r, z), A_z = 0$ (axially symmetric field). למצוא את משוואות התנועה והאינטגרלים של התנועה.

תשובה: Integrals of motion: $M_z = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c}rA, E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$
 Equations of motion: $m\ddot{r} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}, m\ddot{z} = \frac{\partial U_{eff}}{\partial z}, U_{eff} = \frac{1}{2mr^2} \left(M_z - \frac{e}{c}rA \right)^2$



9. למצוא מסלול תנועה של חלקיק טעון עם מסה m ומטען q כאשר:

(א) החלקיק נעה בתוך שדה חשמלית הומוגנית E_0 , ב $t = 0$ מהירות של חלקיק היא v_0 והמהירות נמצאת בזווית α לקיוון של שדה.

(ב) החלקיק נעה בתוך שדה חשמלית משתנה $E_0 = \cos \omega t$, ו $t = 0$ מהירות של חלקיק היא v_0 והמהירות נמצאת בזווית α לקיוון של שדה.

(ג) החלקיק נעה בתוך שדה חשמלית משתנה $E_{0x} = \cos \omega t, E_{0y} = \sin \omega t$, הומוגנית E_0 , ו $t = 0$ מהירות של חלקיק היא $v_0 = 0$.



10. לעשות אינטגרציה של משוואות תנועה של מערכות:

(א) $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + x; x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$ (ב) $L = \dot{x}^2 - 1/x^2; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$
 (ג) $L = \dot{x}^2 + \tan^2 x; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$ (ד) $L = \frac{\dot{x}^2 + 1 - x\dot{x}}{x^2}; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$
 (ה) $L = \dot{x}^2 - 1/x; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ (ו) $L = \dot{x}^2 + e^x; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$
 (ז) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x + \frac{1}{x}; E_0 = -3, x(0) = 0$



11. למצוא תנאי של תנועה סופית ולחשב זמני מחזור של תנועה מחזורית כפונקציות של אנרגיה כאשר:

$$\begin{aligned} & \text{א) } L = \dot{x}^2 - x^2 \quad \text{ב) } L = \dot{x}^2 - x - \frac{1}{x} \quad \text{ג) } L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \quad \text{ד) } L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2 \\ & \text{ה) } L = \dot{x}^2 - \tan^2 x \quad \text{ו) } L = \dot{x}^2 - \tanh^2 x \quad \text{ז) } L = \frac{\dot{x}^2 + 2x - 1}{x^2} \end{aligned}$$



12. לעשות אינטגרציה של משוואות תנועה של מערכות:

$$\begin{aligned} & \text{א) } L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x \quad \text{ב) } L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} \quad \text{ג) } L = \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{x}x + \dot{y}^2}{2} \quad \text{ד) } L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x \\ & \text{ה) } L = \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{y}x + \dot{y}^2}{2x} \end{aligned}$$